



从加速运动介质中的法拉第电磁感应定律到拓展的麦克斯韦方程组

王中林^{1,2,3*}, 邵佳佳^{1,2}

1. 中国科学院北京纳米能源与系统研究所, 北京 101400;

2. 中国科学院大学纳米科学与技术学院, 北京 100049;

3. 佐治亚理工学院材料科学与工程学院, 亚特兰大 30332, 美国

* E-mail: zlwang@binn.cas.cn

收稿日期: 2022-10-07; 接受日期: 2022-11-10; 网络版发表日期: 2023-01-30

摘要 在经典电动力学中, 无论相对运动的是观察者或是有几何形状的介质, 一般教材中默认它们进行匀速直线运动(即惯性参考系); 所以, 狭义相对论(洛伦兹变换)可以方便地描述真空中带电粒子的电磁场变化规律. 在工程应用中, 介质一般有不同的形状和大小, 更多情况下进行的是加速运动. 最近有关运动介质的纳米发电机实验表明, 为描述工程中带电介质变速运动时的电磁场动力学变化规律, 有必要对麦克斯韦方程组进行拓展. 因此, 对于低速运动介质且在忽略相对论效应的情况下, 我们系统地构建了研究加速运动介质电磁现象的动生麦克斯韦方程组. 本文首先概括了动生麦克斯韦方程组的最新研究进展, 接着深入探讨加速运动介质系统中的法拉第电磁感应定律. 我们发现: 费曼物理讲义中列举的“反通量法则”的例子正是由于不可忽略几何形状的介质的运动引起, 描述介质加速运动的 $(\mathbf{v}_r \times \mathbf{B})$ 项没有被包含在经典的麦克斯韦方程组关于电磁感应定律的表达式中. 这是拓展麦克斯韦方程组的一个典型例证. 所以, 介质运动是产生电磁波的源之一(动生电); 对于一个不可忽略几何尺寸和体积的介质, 无论其是否有加速度, 描述介质内部的电动力学现象使用动生麦克斯韦方程组. 另外, 动生麦克斯韦方程组把传统的电磁发电机理论与描述电磁波的麦克斯韦方程组两种不同情况有机结合并统一描述出来. 最后, 对动生麦克斯韦方程组和经典麦克斯韦方程组之间的四个主要区别进行了总结, 提出了近场电动力学与远场电动力学的相关概念.

关键词 动生麦克斯韦方程组, 法拉第电磁感应定律, 非惯性参考系, 费曼的“反通量法则”例子

1 背景介绍

从麦克斯韦的时代开始, 运动介质电动力学研究已经持续了较长时间^[1]. 赫兹曾经系统地将麦克斯韦的电磁理论应用到运动介质方面, 但他推导的方程

只适用于运动导体^[2]. 结合狭义相对论, 闵可夫斯基提出了运动介质的电动力学方程, 即我们今天常用的洛伦兹变换方法^[3]. 近年来, 运动介质电动力学研究又引起大家的强烈兴趣^[4,5], 其中, 关于运动介质的麦克斯韦方程组有大量报道, 且重点集中在与介质相关的

引用格式: 王中林, 邵佳佳. 从加速运动介质中的法拉第电磁感应定律到拓展的麦克斯韦方程组. 中国科学: 技术科学, 2023, 53
Wang Z L, Shao J J. From Faraday's law to the expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53, doi: 10.1360/SST-2022-0322

电磁波散射、反射和传输等方面^[6-8]。然而, 几乎所有的研究都是关于静止或直线匀速运动的观测者(惯性系)观察电磁现象如何变化, 其理论核心是基于洛伦兹变换的狭义相对论。对于一代代的学生来说, 这是处理运动介质电动力学的经典方法^[9,10]。一般来讲, 当两个观察者以恒定速度相互运动时, 他们观测到的物理现象应该是相同的, 即惯性系彼此等价。狭义相对论在描述微观世界或宏观宇宙中带电粒子的电磁场演化行为时有独特优势, 经典麦克斯韦方程组是现代场论的基础。上述理论全部基于一个基本假设: 惯性参考系中没有来自外部机械能输入的情况下, 系统总能量在电场和磁场之间互相转化时守恒。

在实际工程中, 大多数介质进行加速运动, 如圆周运动和振荡等。非惯性系中的运动介质, 必然需要外力驱动。有研究者认为, 可以用广义相对论来解决这类问题, 但是该处理方法和结果对于工程应用来讲可能过于复杂和困难。另一方面, 严格来说, 宇宙中没有绝对的惯性参照系, 因为绝大部分物体都在做变速运动。为了深入研究加速运动介质系统电磁场的动力学变化规律, 比如介质的形状、体积和边界随着时间发生变化, 而且介质的运动速度与时间和空间都相关(速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ^[11~14]), 我们构建了动生麦克斯韦方程组(Maxwell's equations for a mechano-driven media system, MEs-f-MDMS)。方程组成立的条件是介质运动速度远远小于光速, 且忽略相对论效应。需要注意的是, 动生麦克斯韦方程组可以直接阐明力-电-磁场之间的耦合作用(图1)。在本文中, 首先简要总结了经典麦克斯韦方程组需要拓展的相关实验现象, 接着介绍动生麦克斯韦方程组的最新研究进展; 最后, 对描述加速运动介质系统的法拉第电磁感应定律的不同形式和成立条件进行了系统讨论, 并阐明经典麦克斯韦方程组在有非匀速运动介质时为什么需要拓展, 以及如何拓展。

2 介质是什么? 不是电荷的简单堆积!

真空中点电荷运动产生的电磁场可以采用李纳-维谢尔(Liénard-Wiechert)势计算。由于点电荷没有体积和边界, 只是一个抽象的点, 所以无论是否有加速度均可采用李氏方法。静止的电荷用某一点代替, 运动的电荷产生瞬时电流可以用脉冲函数与其速度的乘积表示, 该模型已被用于计算加速器中运动电荷产生

的辐射场。介质不是点电荷的集合体, 而是有原子和电子组成。例如, 固体材料是一类有特定介电常数的介质, 通常有不同的几何形状和大小。事实上, 介质是原子按照特定的顺序和化学性质组合而成, 具有一定的电、磁和弹性等特性, 因而表现出不同的电学、光学、热学和机械性能等。所以, 运动介质产生的电磁场显然不能用Liénard-Wiechert势计算, 麦克斯韦方程组的解必须满足与介质表面相关的边界条件。

处理真空中宇宙间的电磁现象时, 因为空间近于无限大, 几乎所有的介质都可近似被视为质点。在这种情况下, 运动质点的电动力学行为可以用相对论进行描述。但对于地球上的工程技术问题, 特别是对于有几何形状的运动介质, 这种处理方法不成立。

3 麦克斯韦方程组扩展的实验基础: 加速运动介质系统的电磁现象

麦克斯韦方程组的扩展与近年来摩擦电纳米发电机(triboelectric nanogenerator, TENG)的最新实验进展有紧密联系^[15,16]。作为一种新兴的前沿技术, TENG利用接触起电和静电感应效应并通过介质的相对运动将外界的机械能转化为电能/电信号。在外力作用下, TENG的介质表面互相摩擦产生静电荷; 由于介质的非匀速运动, 静电荷与电极表面的自由电荷产生的电场随着时间/相对位置的变化而变化, 进而产生位移电流, 同时在外电路中输出传导电流。此为TENG能量转换的物理基础。一般情况下, TENG的工作频率比较小, 介质的运动速度也比较低, 产生的电磁辐射可以忽略。

然而, 随着技术发展尤其是最近的实验发现, 我们不得不重新思考与TENG相关的电磁现象。比如, 旋转模式的TENG利用介质运动产生的位移电流进行远距离无线传输时, 能够同时点亮多个LED灯^[17]。借鉴MEMS技术, TENG的工作频率甚至达到了1.1 MHz, 该频率足以产生电磁辐射^[18]。另外, TENG可以将人的手指运动产生的机械能转化为电能, 相关的电信号能够传输到几米外的距离^[19], 表明它在无线传输方面的巨大应用潜力。更令我们惊讶的是, 声音触发TENG产生的位移电流可以在水下无线传输5~10 m, 显示其在水中近距离无线通信的可能性^[20]。总的来说, 通过介质相对运动转换的电能可以进行无线传输并用于照明或者为常见的电子设备供电^[21]; 即TENG利用

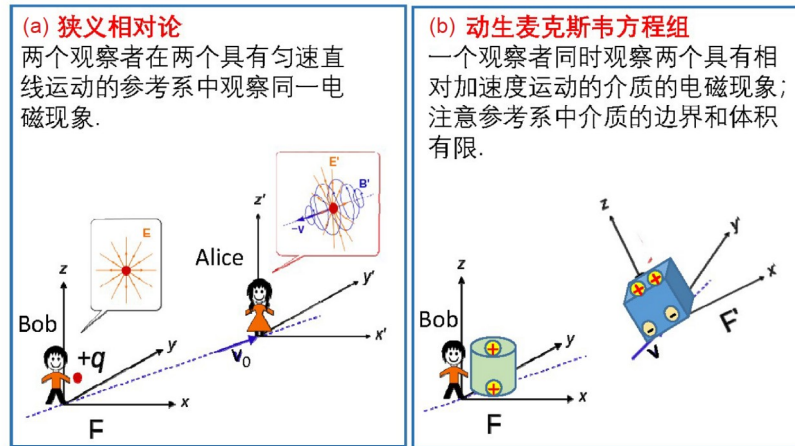


图 1 描述运动介质电磁现象的两种途径。(a) 狭义相对论: 对于两个分别处在相对匀速直线运动参考系的观察者Bob和Alice, 他们分别观察发生在实验室坐标系中的同一个电磁现象以及各自得到的具体结果。简单地说: 两个做相对匀速直线运动的观察者描述同一个电磁现象。(b) 动生麦克斯韦方程组: 一个观察者(Bob)观测两个有相对加速运动介质的电磁现象, 以及具体的观测结果。注意: 参考系中的介质是有边界和体积的, 不能被近似为一个质点。简单地说: 一个观察者描述两个相对加速运动介质的电磁现象

Figure 1 There are two approaches to dealing with the electrodynamics of moving media. (a) Special relativity is about the experience of two observers, Bob and Alice, who are relatively moving at a constant velocity and along a straight line, about the same electromagnetic phenomenon in vacuum space. In this case, the speed of light in vacuum space is assumed invariant regardless of which reference frame it is measured. (b) The MEs-fMDMS is about the observation of one observer regarding two electromagnetic phenomena that are associated with two relatively moving media, respectively; the media have size and shape and they may move with acceleration as driven by an external force. The two phenomena may have an interaction.

外界的机械激励能够产生频率足够大的无线信号。一般情况下, 由于运动介质的边界/几何形状随着时间/空间位置变化而变化; 所以, 我们需要对经典麦克斯韦方程组进行拓展以准确描述加速运动介质系统的电磁行为。这些不仅有利于定量计算TENG的能量输出、优化TENG的器件设计, 同时为预测发电机在未来大规模应用、开发前沿技术提供理论指导。这是我们研究麦克斯韦方程组的主要出发点。

4 加速运动介质系统的动生麦克斯韦方程组

我们的解决方法主要基于以下两个假设: 忽略相对论效应、相对运动速度远远小于光速。这两个假设适用于地球上绝大多数的宏观运动物体。为方便讨论, 从四大物理定律的积分形式出发^[6,22]:

高斯电定律

$$\oiint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f d\mathbf{r}, \quad (1a)$$

高斯磁定律

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (1b)$$

法拉第电磁感应定律

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (1c)$$

安培-麦克斯韦定律

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_C \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s}, \quad (1d)$$

电荷守恒定律:

$$\oiint_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_f d\mathbf{r} = 0. \quad (2)$$

公式(1)中的核心概念是通量, 包括电通量和磁通量。法拉第电磁感应定律主要反映的是穿过一个曲面的总磁通量的变化率会在曲面的边界产生感应电动势, 并且变化的磁场产生环绕的电场。安培-麦克斯韦定律主要说明穿过曲面的电通量的变化率和曲面包含的电流等于感生磁场的环量。基于伽利略时空观, 考虑介质表面随时间变化对通量的影响, 我们推导出了一系列方程组。方程组成立的条件是低速近似并且忽略相对论效应, 这是目前工程应用中比较常见的处理方法^[23]。

虽然积分和微分形式的麦克斯韦方程组两者是

等价的, 但常用的是微分形式. 在两种形式转换过程中有一个重要前提: 介质的体积、形状和边界在实验室参考系固定不变而且静止不动. 通过该假设, 时间微分可以直接与公式(1c)和(1d)中的积分转换, 并直接作用到相应的函数上而不用考虑积分面或线的变化. 结合斯托克斯定理, 得到

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}', \quad (3d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \rho_f = 0. \quad (3e)$$

这是大家熟悉的经典麦克斯韦方程组的微分表达式.

必须指出的是, 经典麦克斯韦方程组只在惯性系中严格成立. 然而准确地讲, 惯性系是数学上假设的理想状态, 在宇宙间几乎不存在, 地球上更不存在. 太阳系在宇宙中的移动速度约为240 km/s; 地球转动的速度包括公转速度和自转速度, 而前者大约是29.79 km/s. 因此, 我们人类所关心的实际工程问题中, 惯性系几乎不存在! 介质的运动一定有平移运动和转动运动, 而且在外力作用下一定有加速度. 为了推导运动介质的电磁动力学方程, 我们用到的一个关键数学方法是通量定理: 对于一般函数 $g(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$, 其边界随着速度场发生变化 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ^[12]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} \\ &= \iint_{s(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G} + (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{G}) \right\} \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_V g d\mathbf{r} = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} g + \nabla \cdot (\mathbf{v}g) \right] d\mathbf{r}. \quad (4b)$$

将公式(4)中的两个恒等式代入公式(1), 并根据斯托克斯定理, 得到动生麦克斯韦方程组^[11,12]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (5c)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} + \mathbf{v} \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}', \quad (5d)$$

其中, $\rho_f \mathbf{v}$ 表示介质以速度 \mathbf{v} 运动时自由电荷产生的电流, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 为时间和空间的函数. 动生麦克斯韦方程组的推导、相关讨论以及潜在应用详见我们之前的工作^[13,14].

如果运动介质只是简单的刚性平移(无旋转速度), 公式(5a)~(5d)可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{D}{Dt} \mathbf{B}, \quad (6c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{D}{Dt} \mathbf{D}', \quad (6d)$$

其中,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (6e)$$

电荷守恒定律:

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_f = 0, \quad (6f)$$

上述推导基于物理学四大物理定律的积分表达式(1a)~(1d).

5 法拉第电磁感应定律的拓展

法拉第电磁感应定律是麦克斯韦方程组的重要组成部分之一, 其核心是楞次定律. 法拉第电磁感应定律有两种表达形式: 第一种如公式(1c)所示, 它出现在很多教科书中, 特别是工程电磁学类的教材资料中^[24-26]. 对于理论物理学, 该定律的另外一种表达形式考虑到了电动势的产生原因(与楞次定律相关), 其形式如下^[9]:

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (7)$$

其中, \mathbf{E}' 表示与坐标系一起运动的介质的电场, 且 $d\mathbf{L}$ 处于相对静止状态. 公式(7)的物理意义为穿过以 C 为边界的任意曲面的磁通量变化率与电动势(ξ_{EMF})对单位电荷沿闭合路径 C 做的功相同. 注意, 公式中的负号表示动生电动势与磁通量的变化率相反, 即趋向于保持总磁通量不变, 也被称为楞次定律. 如果总的磁通量

为 Φ_B , 则电动势的表达式为

$$\zeta_{\text{EMF}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{s(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (8)$$

此为通量法则. 公式(7)的右侧可以用通量公式(4a)进行计算:

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{EMF}} &= -\frac{d}{dt} \iint_{s(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\iint_{s(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, \mathbf{v} 表示边界曲面的瞬时速度, 而不是带电质点的运动速度.

注意: 从数学上讲, 公式(8)和(9)似乎给出了法拉第电磁感应定律的两个等价表示形式, 但根据环路的定义, 两者并不完全相同^[27]. 如果闭合环路的结构不发生变化, 导线和介质(导体)之间没有发生相对运动, 比如导线的几何形状固定, 则公式(8)可以准确地描述此类情况. 公式(9)中的 \mathbf{v} 代表电路的移动速度. 如图2(c)所示, 导线和介质之间的连接既可以固定不变又可以随时间发生变化. 若电路不闭合, 比如金属棒在磁场中移动或旋转, 则公式(9)可以反映该变化, 但公式(8)则不适用.

考虑更为普通的介质运动情况, 将公式(9)代入公式(7),

$$\oint_C (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = -\iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (10)$$

如图1所示, 在Bob(观察者)所在的坐标系中, 作用在点电荷 q 上的洛伦兹力为 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B})$, 其中 \mathbf{v}_r 表示单位点电荷的总运动速度, 它可能与电路的移动速度 \mathbf{v} 不同. 在静止坐标系中, 作用在点电荷上的洛伦兹力为 $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$; 需要注意, 一般情况下由于电路的加速运动导致 $\mathbf{F} \neq \mathbf{F}'$, 除非在惯性系中, 即 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ 时两者才可能相等^[28]. 因此, 当介质沿直线匀速运动时 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, 我们得到 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}'$, 并且 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}$, 则

$$\oint_C [\mathbf{E} + (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} = -\iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (11)$$

现在, 电荷的运动速度包含两个分量: 电路的运动速度 \mathbf{v}_0 和电荷相对于电路的运动速度 \mathbf{v}_r ,

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_r'. \quad (12)$$

注意, 导体内电荷的运动速度 \mathbf{v}_r' 可能会大于导体的运

动速度 \mathbf{v}_0 . 根据公式(11),

$$\oint_C [\mathbf{E} + \mathbf{v}_r' \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} = -\iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (13a)$$

说明当介质运动时, 点电荷的运动轨迹可能与积分路径不重合. 在介质内部, 由斯托克斯定理得到

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r' \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (13b)$$

所以, 对于运动介质, 公式(13a)变为公式(3c)中经典的法拉第电磁感应定律时需要满足如下两个条件:

(1) 介质或电路的运动速度是某一常数 \mathbf{v}_0 (惯性坐标系);

(2) $\mathbf{v}_r' = 0$, 即电荷相对于介质的运动速度为0; 或者介质是一个非常“细”的电路, 电荷沿着/平行于积分路径运动, $[\mathbf{v}_r' \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} = 0$.

Sheng等人^[29]的讨论中忽略了这两个条件, 他们很自然地假设电荷的运动速度与参考系的移动速度相同, 导致在推导过程中与参考系运动速度相关的两项互相抵消, 因此他们得到的结论是麦克斯韦方程组的形式不需要拓展. 根据上述所论, 我们认为他们这个结论不是普遍成立的. 他们的结论只适用于描述惯性系中的电磁现象, 不能成为一个普适结论, 更不适用于加速运动的介质. 对于有一定几何形状和大小的介质, 其运动时的电磁场变化用拓展的麦克斯韦方程组进行定量计算.

另外, 公式(13a)中包含两种可能的情况^[30]:

(1) 积分路径是一条细线, 没有被任何宏观导电介质阻隔(图2(a)和(b)); 因此, 电荷只能沿着细线路运动. 这说明在公式(13a)中 $[\mathbf{v}_r' \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} = 0$, 则法拉第定律变形为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (14)$$

此种情况在所有教科书中几乎都出现过, 但它的成立有一个条件, 即积分路径是一条细线以保证电荷沿着导线流动. “细线”电路(thin wire circuit)是一个假想电路, 它的形状可以是任意的. 根据通量法则, “细线”电路意味着电荷的运动轨迹与计算磁通量的积分路径相同; 当将积分形式的方程转化为微分形式时, 可以将该电路视为虚拟电路. 如果电路不与任何导体边界相交或被阻隔, “细线”电路的假设成立, 相应的虚拟电路可以扩展到任何空间, 但也仅限于真空中的情形, 不

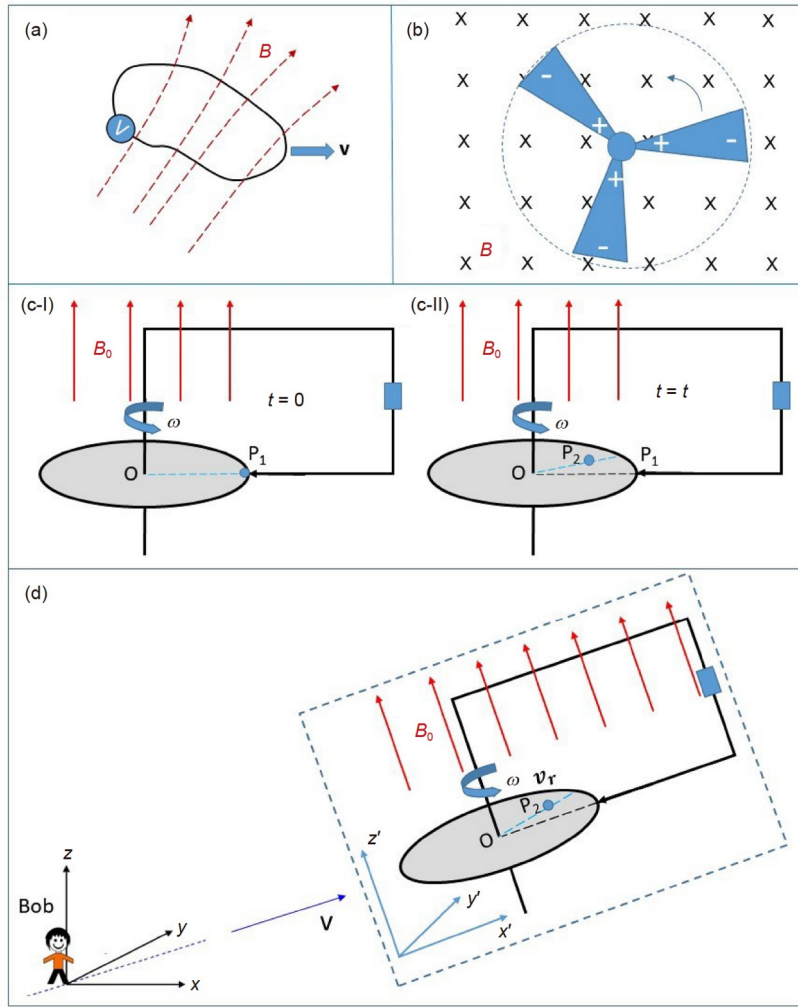


图 2 关于磁通量的典型例子. (a) 闭合线圈在一个随时间和空间变化的磁场中做加速运动. (b) 在均匀磁场中旋转的金属扇叶. (c-I), (c-II) 一个放在均匀磁场中的矩形闭合线圈, 一端连接在金属盘的轴上, 一端连接在金属盘边缘. 法拉第电磁感应定律中增加一个附加项用来描述单位电荷在介质内运动时的电磁场变化规律. (d) (c) 中所示的整个电路相对于Bob所在的实验室参考系进行相对运动

Figure 2 Several cases regarding the flux rule for electromagnetic induction. (a) A typical example of a thin wire circuit that is moving with acceleration with respect to the Lab frame in a time- and space-dependent magnetic field. (b) A conductive fan that is rotating inside a uniform magnetic field. (c-I), (c-II) A rectangular thin wire circuit that is stationary in a uniform magnetic field, but with one end sliding on the edge of a rotating conductive disc at $t=0$ and $t=t$, and the other end is connected to the axis of the disc. The unit charge within the macroscopic size object can move, which leads to an additional term in the Faraday's law for electromagnetic induction. (d) The circuit as shown in (c) but the whole circuit has a relative movement with respect to the Lab reference frame.

适用于描述宏观介质运动的情况. 因为对于有形状的介质, 电路的导线很可能会和介质直接发生相交/连接, 费曼的“反通量法则”情形就会出现.

(2) 当介质有一定的形状和体积时, 电荷的相对速度在积分回路和介质相交的区域中有垂直于积分路径的分量. 在实际工程应用中, 由于介质的尺寸、形状和体积等因素的影响, 在研究相关电磁现象时不能忽视

这些宏观因素或者只是抽象地将介质当作一个点来处理. 在介质内部 $\oint_C [\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} \neq 0$, 图2(c)的例子有助于理解更为接近实际的情况. 由于电荷运动轨迹与积分路径不重合, 从几何角度看虽然总磁通量没有发生变化, 但洛伦兹力可以作用在电荷运动时的任何路径分段处. 利用斯托克斯定律, 考虑到介质内部的电磁

场, 公式(13a)变形为

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (15)$$

该情况在一般经典教科书中很少讨论. 如图2(b)和(c)所示, 当磁场中有扇叶形的旋转介质或金属圆盘时公式(15)都适合. 以金属圆盘为例, 由于金属盘有一定的形状和尺寸, 电荷可以在其内部“漫游”, 所以很难确定电荷的实际积分路径. 以摩擦纳米发电机为例, 它一般使用两个金属薄膜作为电极, 在外界机械作用力下电极随着摩擦层一起运动, 进而引起外电路中电流的流动. 由于摩擦层和电极的相对运动, 电极与外界导线构成回路的形状随时间发生变化. 另外, 牛顿力学可以很好地描述介质在外力作用下的实际运动情况.

6 介质的加速运动与费曼的“反通量法则”例子

公式(8)和(9)似乎给出了法拉第电磁感应定律的两个等价表述, 但事实上它们并不完全相同. 如果电路的基本结构比如导线与导体之间无相对运动, 则公式(8)适用于该情况. 公式(9)中的 \mathbf{v} 代表电路的运动速度, 它可以描述导线与介质之间存在相对运动时如何产生电动势. 在费曼物理学讲义中^[22], 费曼特别强调了一些“反通量法则”的例子^[31]. 如图2(c)和(d)所示, 如果仅仅根据几何面积来判断, 当扇叶在均匀磁场中旋转时, 总磁通量不改变. 但由于洛伦兹力的作用, 沿着扇叶存在电势差(运动导致的电势差)^[32,22]. 这是因为随着扇叶旋转, 扇叶扫过的有效面积发生变化进而引起磁通量发生改变. 根据公式(9), 当扇叶旋转时, 洛伦兹力对单位电荷做的功为 $\zeta_{\text{EMF}} = \int_0^a r\omega B_0 dr = \frac{1}{2}\omega a^2 B_0$; 相反, 使用公式(8)不能得到此结果.

假如图2(c)构成一个闭合回路, 当金属盘旋转时, 尽管通过圆盘的总磁通量不随时间变化, 但外接负载 R 中有电流通过并产生电势差. 这似乎违反了通量法则(公式(1c)), 实际上可以如下理解: 在此情况下, 电荷时刻保持垂直于径向的速度 $v_r=r\omega$ 在金属盘内运动; ω 为角速度. 沿半径 a 从 P_1 点到 O 点的电势差用洛伦兹力计算:

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{EMF}} &= \int_a^0 [\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^0 r\omega B_0 dr = \frac{1}{2}\omega a^2 B_0. \end{aligned} \quad (16)$$

相应地, 此电路中的电流大小为 $\frac{1}{2R}\omega a^2 B_0$. 或者, 结合两条曲线之间圆盘的面积: $A=\omega t a^2/2$, 根据公式(8)可以得到 $\zeta_{\text{EMF}} = AB_0/t = \frac{1}{2}\omega a^2 B_0$. 此结果与公式(15)得到的结果相同.

图2(c)为被费曼称为“反通量法则”的例子, 但他对于这些不满足楞次定律的例子没有给出清晰的物理解释就在书中一笔带过了. 当然, 我们熟悉的麦克斯韦方程组也没有包括这些情况. 该悖论可能是由于电荷在圆盘中的运动路径(蓝色虚线)偏离了原来的矩形积分“电路”(如图2(c-II)中黑色虚线所示), 而计算磁通量时依然按照矩形“电路”进行计算. 一般情况下, 计算磁通量之前需要明确定义电流的具体流动路径, 而本例中的电流分布在整个金属盘上面. 当 $t=0$ 时, 电荷从圆盘边缘的 P_1 点进入; 经过一段时间 t , 电荷移动到 P_2 点(图2(c-II)), 它的运动轨迹用蓝色虚线表示. 此时, 图2(c-II)中两条虚线之间的区域为磁通量变化的实际区域. 所以, 通量法则需要考虑介质相对运动和电路结构变化时电荷的实际输运过程. 图2(c)中出现“反通量法则”的情况也主要是由于加速运动的介质是导体; 如果运动介质是绝缘体, 情况则可能完全不同, 此时需要具体问题具体分析. 假如图2(c)中的细导线处于静止状态, 金属盘不断旋转, 同时一个金属尖在圆盘边缘滑动. 圆盘内部某一点的速度是空间(\mathbf{r})和时间(t)的函数, 且圆盘旋转时存在加速度, 则该系统的电磁场动力学变化用公式(15)即可. 该例同时说明研究运动介质系统的电磁场变化时为什么需要拓展的麦克斯韦方程组——动生麦克斯韦方程组. 特别地, 如图2(d)所示, 如果整个闭合回路相对于实验室参考系匀速运动, 且圆盘在转动, 则可以用公式(13b)来研究相关的电磁现象.

7 适用于加速运动介质系统的法拉第电磁感应定律

如果介质进行加速运动, 计算单位电荷所受的总作用力(电路处在静止参考系)必须考虑惯性力. 在这种情况下, 作用在单位电荷 q 上的力为^[31]

$$q\mathbf{E}' - \frac{\partial}{\partial t}(m\mathbf{v}) = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}, \quad (17)$$

其中, m 是假定为虚拟单位电荷的质量. 如果仅仅是理论计算, 并假设电荷为没有质量的“虚拟电荷”, 则与质量有关的项会消失. 利用方程(17), 法拉第电磁定律方程(7)改写为

$$\oint_C \left[\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial t}(m\mathbf{v}) \right] \cdot d\mathbf{L} = - \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (18)$$

其中, \mathbf{v} 代表介质的运动速度. 可以分如下情况进行讨论^[31].

(1) 如果积分路径是一个闭合的细线电路, 没有被导电介质阻隔, 电荷的相对移动轨迹与某时刻计算回路电动势的积分路径相同, 公式(18)中左边第二项会自动消除. 如果环路进行刚性平移, 速度为 $\mathbf{v}(t)$, $[\nabla \times (m\mathbf{v})] = 0$, 公式(18)中左边第三项也可以消除, 因而得到

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (19)$$

(2) 如果积分路径被较大的导电介质隔断, 电荷的相对移动轨迹与计算回路电动势的积分路径不相同, 则公式(18)中左边第二项需要保持. 另外, 当环路进行刚性平移时, 移动速度为 $\mathbf{v}(t)$, $[\nabla \times (m\mathbf{v})] = 0$, 此时公式(18)中的第三项消除掉:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (20a)$$

或者

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{D}{Dt} \mathbf{B}. \quad (20b)$$

(3) 对于更为普遍的情况, 当环路的移动速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 与时间和空间都有关时, 比如流体或者弹性体, 环路的旋转速度与 $[\nabla \times (m\mathbf{v})] = 0$ 相关, 可变形环路(液体、弹性介质或膨胀等)的加速运动将会产生电场. 此时, 因为环路的“膨胀/收缩”, $[\nabla \times (m\mathbf{v})] = 0$ 可以被视为一种电磁辐射源. 假如电荷没有质量 $m=0$, 公式(18)的最后项也将消掉.

总之, 我们可以分三种情况进行分析: 1) 作用在点电荷 q 上的洛伦兹力为 $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}_t \times \mathbf{B})$, 如果存在电路的相对运动, 此时需要用 $\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}$ 进行计算. 2) 如果仅存在变化的磁场, 将会感应生成一个电场 \mathbf{E} , 则需考

虑 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$. 上述两种情况虽然属于不同的物理效应, 但都可以用通量法则: 即电路中产生的电动势等于穿过该电路的磁通量的变化率来理解. 3) 如果电荷的相对移动轨迹被较大的导电介质隔断时, 无法准确定义某个时刻回路的积分路径计算电动势, 沿着回路运动的单位电荷所做的功也无法计算, 此时公式(10)和(13)可以解决此类问题.

8 安培-麦克斯韦定律在加速运动介质系统中的推广

事实上, 并不能直接将安培-麦克斯韦定律推广到加速运动介质系统中. 在最初始的电磁学方程中, 为了满足电荷守恒定律, 麦克斯韦定义了位移电流的概念, 并将其以微分的形式引入到方程组中, 即在安培定律中加入新项 $\partial \mathbf{D}' / \partial t$. 因此, $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ 的物理意义并不像法拉第电磁感应定律那样利用电动势直接描述加速运动介质系统的电磁场变化. 考虑到电场和磁场之间的对称性, 描述介质内部的电磁现象时安培-麦克斯韦定律的可能表达式为

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v}_r \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}', \quad (21)$$

其中, \mathbf{D}' 为电位移矢量, 其意义与之前的文章保持一致^[11,12]. 介质内部的电动力学变化规律可以由下面动生麦克斯韦方程组描述^[11,12]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (22b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (22c)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v}_r \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'. \quad (22d)$$

如果考虑动生极化项 \mathbf{P}_s , 则 \mathbf{D}' 可以被 $\mathbf{D}'+\mathbf{P}_s$ 所代替. 公式(22a)~(22d)可以描述一个运动介质系统的电磁场变化规律, 该介质系统以任意低速运动, 存在加速度和运动导致的极化现象. 所以上述方程组能够准确描述力-电-磁场三者之间的耦合情况. 以图2(c)所示情况为例, 金属盘的速度为 $\mathbf{v}_r = r\omega\hat{\phi}$; 若电荷与介质之间没有相对运动, 即 $\mathbf{v}_r=0$, 则公式(22a)~(22d)还原为经典麦克斯韦方程组. 从积分方程出发, 对应于公式

(22a)~(22d)的边界条件是

$$[\mathbf{D}'_2 - \mathbf{D}'_1] \cdot \mathbf{n} = \sigma_f, \quad (23a)$$

$$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (23b)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{r2} \times \mathbf{B}_2 - \mathbf{v}_{r1} \times \mathbf{B}_1] = 0, \quad (23c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 - \mathbf{v}_{r2} \times \mathbf{D}'_2 + \mathbf{v}_{r1} \times \mathbf{D}'_1] \\ = \mathbf{K}_S + \sigma_f \mathbf{v}_s, \end{aligned} \quad (23d)$$

其中, \mathbf{K}_S 是界面电流密度, σ_f 是界面的自由电荷密度, \mathbf{v}_s 是整体线路平行于界面的运动速度, \mathbf{v}_{r1} 和 \mathbf{v}_{r2} 分别代表介质1和介质2相对于电路的运动速度.

在工程应用方面, 我们的观测主要在地球上的实验室坐标系里面进行(图3). 当空间中存在多个运动介质时, 介质内部的电磁场变化通过动生麦克斯韦方程组确定. 此时, 不用担心真空中出现超光速 c_0 的现象, 在介质内部的光速 c_m 永远小于 c_0 , 且 $v_r \ll c_m$. 无论介质是否运动, 描述真空中的电磁场变化用经典麦克斯韦方程组描述, 而介质内部使用动生麦克斯韦方程组, 两者的解在介质界面相接并满足边界条件; 因此, 两个方程组之间并不矛盾, 只是所作用的区域不同. 而场论主要用来研究宇宙中的电磁现象; 相对于浩瀚的

宇宙而言, 介质的尺寸可以被当作一个点来处理, 因此无需担心理论方面存在矛盾.

9 动生麦克斯韦方程组的张量形式

假设介质各向同性, 本构关系依然成立; 当介质做刚性平移运动时, 动生麦克斯韦方程组为

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f, \quad (24a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (24b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \mathbf{B}, \quad (24c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}' + \mu \varepsilon \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \mathbf{E}, \quad (24d)$$

电荷守恒定律:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \rho_f = 0, \quad (24e)$$

其中,

$$\rho' = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_S, \quad (25a)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}t} \mathbf{P}_S. \quad (25b)$$

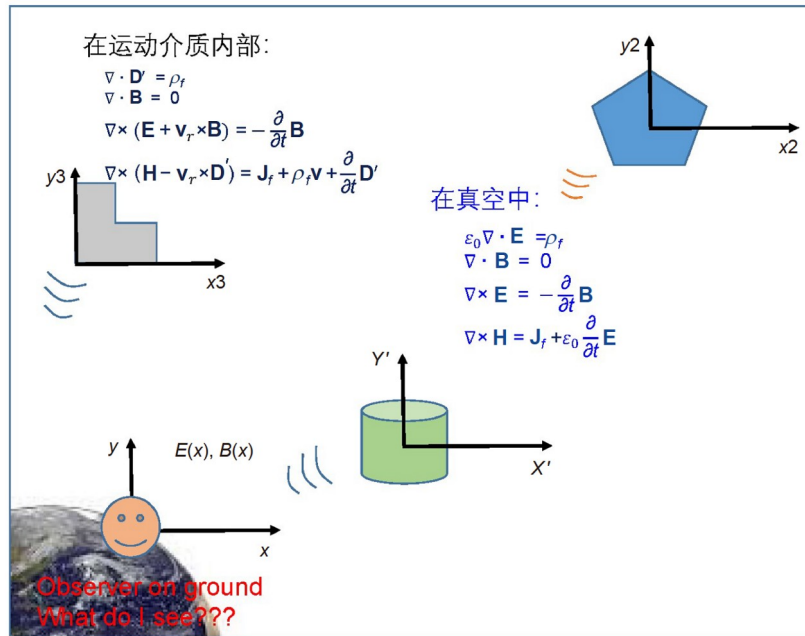


图3 当介质在空间中运动时, 动生麦克斯韦方程组与经典麦克斯韦方程组分别描述介质内部和真空中的电磁场变化规律; 观察者在地球上的实验室坐标系内进行观测

Figure 3 The conjunction of the Maxwell's equations for a mechano-driven system inside the media and the classical Maxwell's equations in the vacuum space, as the media are moving in space, and the observation is done on earth (in a Lab frame).

利用标量势和矢量势:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (26a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{D}{Dt} \mathbf{A}. \quad (26b)$$

将公式(25a), (25b)代入公式(24a), (24d)得到

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{D^2}{Dt^2} \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}', \quad (27a)$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{D^2}{Dt^2} \varphi = -\frac{\rho'}{\varepsilon}. \quad (27b)$$

成立条件如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{D}{Dt} \varphi = 0, \quad (27c)$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \\ &\quad + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla)(\mathbf{v}_r \cdot \nabla), \end{aligned} \quad (27d)$$

其中, $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_r$ 为加速度, 表示施加外力作用的结果.

将公式(24a)~(24e)变为张量的形式, 即动生麦克斯韦方程组用经典场论的方法表示. 利用电动力学的经典表达式, 电磁场的反对称张量^[30]:

$$F^{\alpha\beta} = \xi^\alpha A^\beta - \xi^\beta A^\alpha, \quad (28a)$$

$$F_{\alpha\beta} = \xi_\alpha A_\beta - \xi_\beta A_\alpha, \quad (28b)$$

其中, $\alpha, \beta = (1, 2, 3, 4)$; 新定义的算符为

$$\xi^\alpha = \left(\frac{1}{c} \frac{D}{Dt}, -\nabla \right), \quad (28c)$$

$$\xi_\alpha = \left(\frac{1}{c} \frac{D}{Dt}, \nabla \right), \quad (28d)$$

$$A^\alpha = (c\varphi, \mathbf{A}), \quad (28e)$$

$$A_\alpha = (c\varphi, -\mathbf{A}), \quad (28f)$$

可以证明:

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (29a)$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (29b)$$

其中, $c=c_m=1/(\mu\varepsilon)^{1/2}$. 利用上式容易得到

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi - \frac{D}{Dt} A_x = -(\xi^0 A^1 - \xi^1 A^0), \quad (30a)$$

$$B_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y = -(\xi^2 A^3 - \xi^3 A^2), \quad (30b)$$

公式(24a)~(24e)进一步写为

$$\xi_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu J^\beta, \quad (31)$$

其中, $J^\beta = (c\rho', \mathbf{J}')$. 公式(31)与经典麦克斯韦方程组的张量形式相同, 只是算符 ∂_α 被 ξ_α 替代. 当 $\mathbf{v}_r=0$ 时, 该公式还原为经典麦克斯韦方程组.

10 电磁发电机理论与电磁波理论的统一表述

我们熟悉的电磁发电机的原理是在机械力作用下导线切割磁感线, 洛伦兹力作用在电荷上而产生在导线内部流动的传导电流. 电动机的工作原理是导线内流动的电流与磁场相互作用而产生洛伦兹力所导致的力矩. 在发电机和电动机的设计中主要考虑的是线内的传导电流, 不考虑由于转子转动所产生的电磁波辐射, 即使辐射确实存在. 另外, 描述电磁波在空间传播的理论中, 一般不考虑由于介质的机械运动(机械功)而产生的电流, 即不考虑传导电流 \mathbf{J} 是如何产生的, 而只关心电流震荡所产生的电磁辐射, 即位移电流; 在假设介质处于静态的条件下, 直接运用麦克斯韦方程组求解电磁波在真空或物质中的传播. 大家一般分别考虑这两种情况, 并不把两者情况关联起来. 我们推导的动生麦克斯韦方程组可以将两种情况有机结合并统一描述出来(如图4所示), 这是拓展经典麦克斯韦方程组的一个典型表现. 介质的运动速度不一定很大, 但运动的频率可以很高, 因介质运动辐射出的电磁波在我们的实验中已观察到, 这在未来的传感和信息收集方面可能有新的用途.

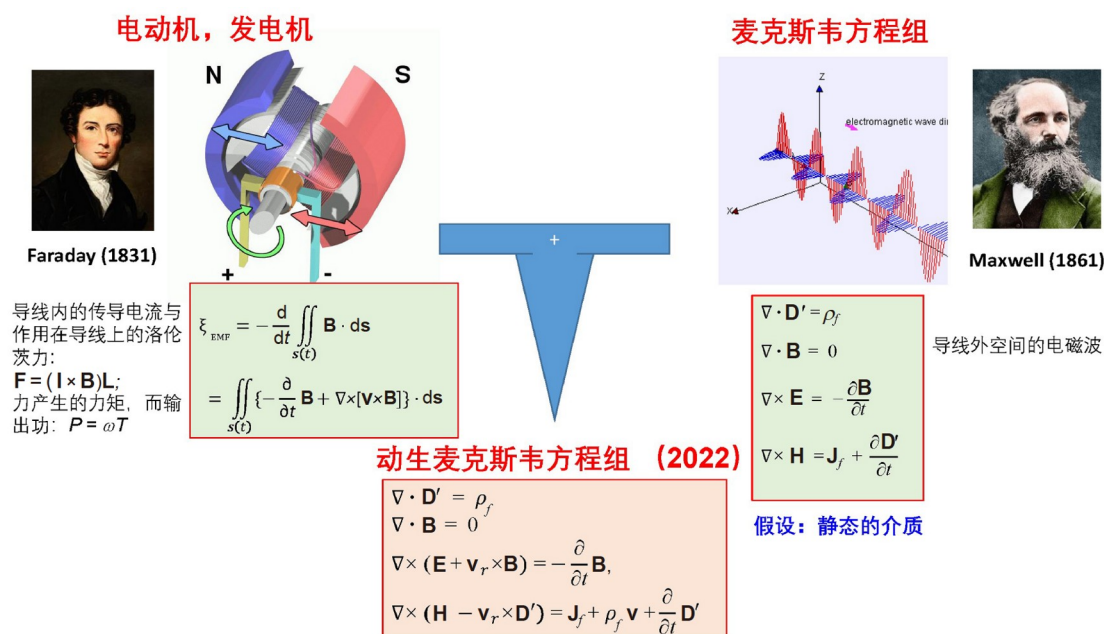


图 4 动生麦克斯韦方程组是关于电磁发电机/电动机理论和麦克斯韦电磁波理论的统一表述

Figure 4 Maxwell's equations for a mechano-driven system is a unification of the theory for electromagnetic generator/motor and the theory of electromagnetic waves.

11 讨论

迄今为止, 科学家建立了两种最基本的时空观: 相对论时空观和绝对时空观. 根据不同的时空观类型, 运动介质电动力学有两种处理方法. 在惯性系中, 如果介质进行匀速直线运动, 可以使用狭义相对论来研究电磁场的演化规律, 此时系统中电场和磁场的总能量守恒. 在狭义相对论中, 假定介质的形状和边界保持不变时推导出微分型麦克斯韦方程组, 通过洛伦兹变换研究在实验室坐标系中观测的运动介质的电磁行为. 洛伦兹变换公式是闵可夫斯基处理运动介质电动力学的核心变换. 在非惯性系中的运动介质系统, 比如介质运动速度是时间的函数, 处理此情况可能需要广义相对论; 但对于工程应用来讲, 解决办法过于复杂. 在这种情况下, 从四大物理定律的积分形式出发, 可以基于伽利略时空观推导出实验室坐标系中的所有场^[6,11,12]. 该方法的重大优势在于当介质的运动速度远小于光速并忽略相对论效应时, 可以解决非惯性系中介质沿复杂轨迹运动时的电磁场动力学变化问题. 另外, 该方法适合于应用物理领域, 并且在工程电动力学方面得到广泛应用^[24,22]. 由于外界机械激励和介质

的加速运动, 动生麦克斯韦方程组不具有洛伦兹协变性.

本文我们详细讨论了法拉第电磁感应定律的拓展条件, 尤其是综合考虑导体中的电荷运动和参考系中存在惯性力时的应用问题. 到目前为止, 几乎所有的教科书中描述的是法拉第电磁感应定律适用于导电介质为细线的情况, 但该假设几乎从来没有被明确地指出过. 然而, 如果导电介质是一薄片或其他特殊几何形状(比如圆盘), 电荷的移动轨迹将会偏离计算电动势时的几何回路积分路径, 所以需要新增附加项对定律进行拓展. 另外, 对于加速运动的介质系统, 法拉第电磁感应定律应该被扩展, 尽管此时附加项的数值可能比较小, 否则可能导致计算结果和实验结果不符合.

法拉第电磁感应定律的积分方程有两种形式: 如公式(1c)和公式(7)所示; 其中, 公式(7)为场论形式, 基于电动势的产生原因而建立; 而公式(1c)更多应用于工程电动力学领域. 从工程应用角度来看, 如果每一种形式能在其对应的理论框架内保持一致和自洽, 那么从这两个不同形式的方程中得到的结果应该是等价的.

12 结论与展望

我们的结论是: 无论周围介质运动与否, 描述真空中的电磁现象时麦克斯韦方程组不需要被拓展; 对于有限尺寸或体积、具有加速运动的导电介质, 反映介质内部的电磁场变化需要运用动生麦克斯韦方程组. 这是因为电荷在介质内部运动时, 特别是存在导体时, 电荷运动轨迹与计算电动势的回路积分路径不一定重合, 利用磁通量计算的结果与实际有可能不符. 在介质外的真空中, 电磁场动力学变化通过经典麦克斯韦方程组来描述. 两组方程的解在介质界面相接并满足边界条件. 所以对于地球上工程应用相关的运动介质的电磁场变化, 动生麦克斯韦方程组能够解决相关问题.

我们对动生麦克斯韦方程组和经典麦克斯韦方程组之间的四个主要区别进行了总结, 前者 and 后者分别重点阐述了: 1) 加速运动的非惯性系与匀速直线运动的惯性系; 2) 包括费曼提出的“反通量法则”例子的电磁理论与不包括“反通量法则”情况的电磁理论; 3) 多个运动介质的电动力学问题与单个运动介质的电动力学问题; 4) 全场(近场+远场)电动力学与远场电动力学. 传统的电动力学更关注电磁波的远距离传输、反射等电磁现象(远场), 如雷达和天线, 用经典麦克斯韦方程组的特解来描述; 但一般不考虑源的运动状态和与源相关的边界条件, 因此一般只考虑远场的电磁波行为. 而动生麦克斯韦方程组不但包括远场的电磁行为, 同时也包括源附近场的行为(近场); 远场是方程组的特解, 而近场取决于方程组的齐次解; 方程组的全解(全场)需要满足边界条件.

法拉第电磁感应定律的积分方程有两种形式: 分别如公式(1c)和公式(7)所示; 其中, 公式(7)为场论形式, 基于电动势的产生原因而建立; 公式(1c)更多应用于工程电动力学领域. 从工程应用角度来看, 如果每一种形式能在其对应的理论框架内保持一致和自洽, 那么从这两个不同形式的方程中得到的结果应该是等价的.

标准的麦克斯韦方程组在惯性系中严格成立. 然而准确地讲, 惯性系是数学上假设的理想状态, 在宇宙间几乎不存在. 太阳系在宇宙中的移动速度约为 240 km/s; 地球转动的速度包括公转速度和自转速度, 而前者大约是 29.79 km/s. 因此, 我们人类所关心的问

题中, 真正理想的惯性系是不存在的. 介质的运动一定有平移运动和转动运动, 而且在外力作用下一定有加速度. 所以, 从严格的角度讲, 动生麦克斯韦方程组的应用范畴在理论上可能远超过标准的麦克斯韦方程组. 我们知道规范场论主要基于真空中的麦克斯韦方程组; 如果利用场论来统一四大力, 那么是否应该考虑宇宙间非惯性系中所引入的拓展项? 但对于有黑洞存在的天体, 重力加速度可能非常大. 这个问题有待探讨.

如图4所示, 电磁学的发展史是一个在科学和技术等方面都不断深化和进步的历史. 从法拉第在1831年第一次发现电磁感应现象开始, 到1834年楞次用通量的概念定量描述实验现象, 接着麦克斯韦在前人研究基础上于1861年引入位移电流, 最后经过诸多科学家的努力在1900年成功构建了麦克斯韦方程组. 麦克斯韦最伟大的贡献之一是引入位移电流的概念, 与传导电流相比, 位移电流是一种在空间中以场的形式传播的“电流”. 麦克斯韦在理论上预言的电磁波在1888年被赫兹的实验所证实. 从今天的角度来看, 电磁波的发现无疑是最令人振奋、最有用的发现之一, 但在发现电磁波时赫兹却说: 它(电磁波)毫无用处, 这个实验只是证明麦克斯韦的预言是正确的. 虽然我们看不到这些神秘的电磁波, 但它们确实存在. 赫兹本人并没有意识到电磁波的发现意味着现代无线通讯的开端, 直至今日, 无线通信已几乎深入到世界的每一个角落. 科学家历经半个多世纪的努力终于统一了电和磁, 同时发现了电磁波. 这一过程给予我们以深刻的启示: 任何理论创新和实验发现对未来的实际影响或可能凸显的重要现实意义是当下难以判断的. 因此, 我们更应该以开放和包容的心态来对待新理论和新发明, 实事求是, 与时俱进!

因此, 如图5所示, 我们对动生麦克斯韦方程组的未来发展进行了展望. 2006年我们发明了压电纳米发电机^[33], 2012年发明了摩擦电纳米发电机^[15]; 这两个发明证明了运动的介质能够产生电磁输出. 2017年我们首次在经典麦克斯韦方程组中引入动生极化项 \mathbf{P}_s , 用于定量描述纳米发电机的输出特性. 对于加速运动介质系统, 2021年我们对麦克斯韦方程组进行了拓展, 使得它能够描述工程技术中运动介质的电磁场变化. 目前的一些实验已经证明了构建动生麦克斯韦方程组的必要性, 该方程组的科学意义和潜在技术应用需要

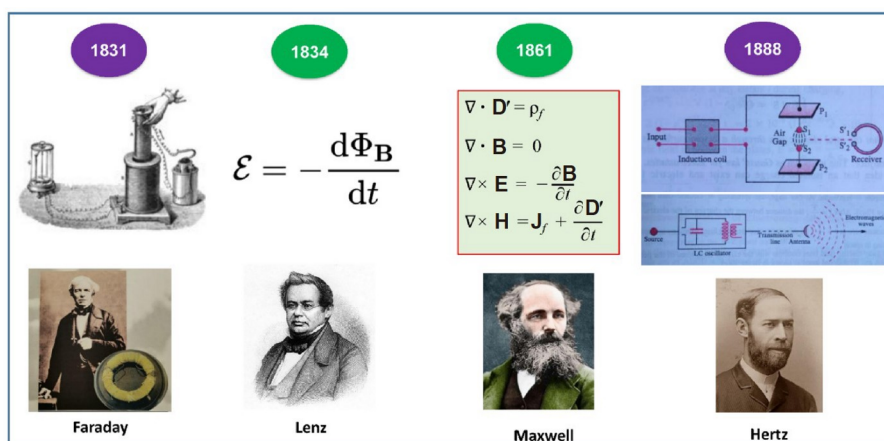


图5 电动力学发展简史.

Figure 5 A brief history regarding the development of electrodynamics

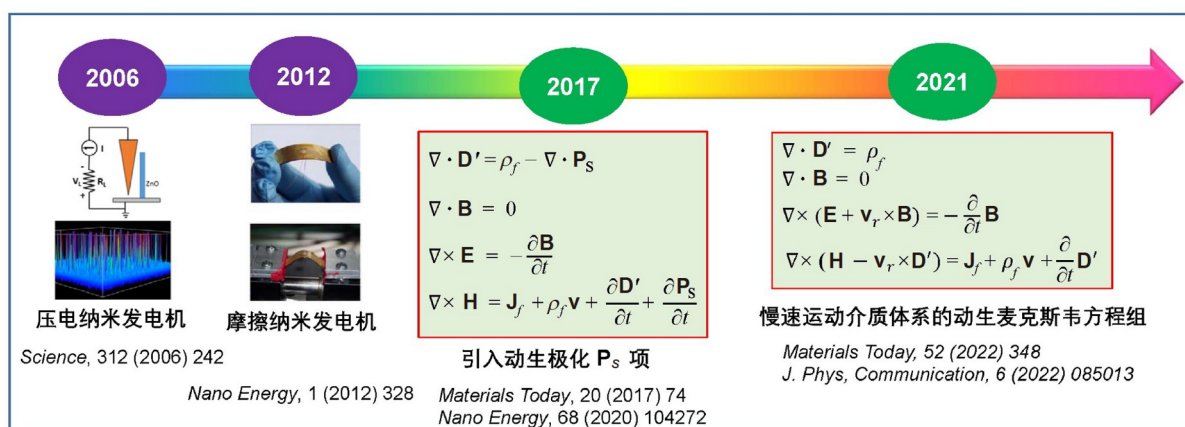


图6 动生麦克斯韦方程组的发展简史

Figure 6 Our journey regarding the expansion of Maxwell's equations for a mechano-driven slow-moving medium system.

进一步的实验验证和深化. 需要注意的是, 目前大多数电动力学教科书中的电磁现象至少是70~130年前的实验观察到的, 而且这些著作也一般都是半个世纪以前编著的. 考虑到新技术日新月异的影响, 以及不断涌现的各种新奇实验现象, 我们认为有必要对电动力学相关教学内容进行改进或扩充, 在继承原有经典知识基础之上不断创新, 与时俱进, 并在创新中发展.

在发明晶体管 and 集成电路的几十年前, 1926年特斯拉对无线电技术做出过预测: 当无线电技术得到大规模应用时, 地球将会变成一个巨大的大脑, 世间万

物成为大脑的有机组成部分. 距离也已经不是问题, 无论多远, 我们都可以实现即时通信. 虽然彼此之间相隔千里, 但通过电视电话, 就像面对面一样, 我们能够清楚地看到对方, 听到对方的声音. 实现这些目的的工具/设备甚至可以直接放在我们的口袋里. 我们今天的智能手机就是特斯拉所预言的, 但回溯到1926年, 人们会相信特斯拉的判断吗? 因此, 正如林肯先生所说的那样: 实现梦想或预测未来的最好方法就是创造未来. 我们期待动生麦克斯韦方程组将会得到进一步深化和广泛应用, 为解决人类所面临的可持续发展问题做出贡献!

参考文献

- 1 Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philos Trans Roy Soc London*, 1865, 155: 459–512
- 2 Hertz H. On the fundamental equations of electro-magnetics for bodies in motion. *Wied Ann*, 1890, 41: 369
- 3 Minkowski H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern (The Fundamental Equations for Electromagnetic Processes in Moving Bodies). *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1908, 53: 111
- 4 Gluckman A G. On electrodynamic processes of electrified bodies in motion. *J Washington Acad Sci*, 1984, 74: 70–76
- 5 Darrigol O. Emil Cohn's electrodynamics of moving bodies. *Am J Phys*, 1995, 63: 908–915
- 6 Rozov A. Maxwell equations of slow-moving media. *Z Nat A*, 2015, 12: 1019–1024
- 7 Tai C T. A study of electrodynamics of moving media. *Proc IEEE*, 1964, 52: 685–689
- 8 Costen R C, Adamson D. Three-dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary. *Proc IEEE*, 1965, 53: 1181–1196
- 9 Jackson J D. *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. *Am J Phys*, 1999, 67: 841–842
- 10 Landau L D, Lifshitz E M. *Electrodynamics of Continuous Media*. New York: Pergamon Press, 1984
- 11 Wang Z L. On the Expanded Maxwell's equations for moving charged media system-general theory, mathematical solutions and applications in TENG. *Materials Today*, 2021, 52: 348–363
- 12 Wang Z L. Maxwell's equations for a mechano-driven, shape-deformable, charged media system, slowly moving at an arbitrary velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. *J Phys Commun*, 2022, 6: 085013
- 13 Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed motion media system under slow motion and nonrelativistic approximations (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2022, 52: 1198–1211 [王中林, 邵佳佳. 非匀速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组-低速与非相对论近似. *中国科学: 技术科学*, 2022, 52: 1198–1211]
- 14 Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed-motion media system for engineering electrodynamics and their solutions (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2022, 52: 1416–1433 [王中林, 邵佳佳. 面向工程电磁学的动生麦克斯韦方程组及其求解方法. *中国科学: 技术科学*, 2022, 52: 1416–1433]
- 15 Fan F R, Tian Z Q, Lin Wang Z. Flexible triboelectric generator. *Nano Energy*, 2012, 1: 328–334
- 16 Wang Z L. From contact electrification to triboelectric nanogenerators. *Rep Prog Phys*, 2021, 84: 096502
- 17 Cao X, Zhang M, Huang J, et al. Inductor-free wireless energy delivery via Maxwell's displacement current from an electrodeless triboelectric nanogenerator. *Adv Mater*, 2017, 30: 1704077
- 18 Chen C, Wen Z, Shi J, et al. Micro triboelectric ultrasonic device for acoustic energy transfer and signal communication. *Nat Commun*, 2020, 11: 4143
- 19 Wang H, Wang J, Yao K, et al. A paradigm shift fully self-powered long-distance wireless sensing solution enabled by discharge-induced displacement current. *Sci Adv*, 2021, 7: eabi6751
- 20 Zhao H, Xu M, Shu M, et al. Underwater wireless communication via TENG-generated Maxwell's displacement current. *Nat Commun*, 2022, 13: 3325
- 21 Cao X, Xiang H, Ma P, et al. An easy and efficient power generator with ultrahigh voltage for lighting, charging and self-powered systems. *Nano Energy*, 2022, 100: 107409
- 22 Ni G Z. *Principle of Engineering Electromagnetism* (in Chinese). 2nd ed. Beijing: High Education Press, 2009 [倪光正. *工程电磁场原理*. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2009]
- 23 Levy-Leblond J M. Une Nouvelle Limite Non-Relativiste Du Groupe De Poincare. *Ann l'IHP Phys Théor, Sect A: Phys Theor*, 1965, III: 1–12
- 24 Stratton J A. *Electromagnetic Theory*. New York: McDraw-Hill Book Company, 1941. 348
- 25 Wang Y P. *Engineering Electrodynamics* (in Chinese). Xi'an: Xidian University Press, 2007 [王一平. *工程电动力学*. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2007]
- 26 David J G. *Introduction to Electrodynamics*. 3rd ed. Delhi: Prentice Hall of India, 1998
- 27 Zhao K H. Examples for disapprove flux rule (in Chinese). *Coll Phys*, 1987, 7: 10–13 [赵凯华. 反通量法则反例问题. *大学物理*, 1987, 7: 10–13]

- 28 Thakkar V. Faraday's Law in Moving Media. 2015, <https://www.researchgate.net/publication/299461166>
- 29 Sheng X L, Li Y, Pu S, et al. Lorentz transformation in Maxwell equations for slowly moving media. *Symmetry*, 2022, 14: 1641
- 30 Wang Z L. Electrodynamics for a mechano-driven media system moving with acceleration, 2022, <http://arxiv.org/abs/2207.13119>
- 31 Wang Z L. The expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration, 2022, *Intern J Modern Physics B*, 2022, 2350159, <https://doi.org/10.1142/S021797922350159X>
- 32 Zangwill A. *Modern Electrodynamics*. Cambridge: Cambridge Press, 2012
- 33 Wang Z L, Song J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays. *Science*, 2006, 312: 242–246

From Faraday's law to the expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration

WANG ZhongLin^{1,2,3} & SHAO JiaJia^{1,2}

¹ *Beijing Institute of Nanoenergy and Nanosystems, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101400, China;*

² *School of Nanoscience and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*

³ *School of Materials Science and Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332, USA*

In classical electrodynamics, by motion for either the observer or the media, it always naturally assumed that the relative moving velocity is a constant along a straight line (e.g., in an inertia reference frame), so that the electromagnetic behavior of charged particles in vacuum space can be easily described using special relativity. However, for engineering applications, the media have shapes and sizes and may move with acceleration, and recent experimental signs of progress in triboelectric nanogenerators have revealed pieces of evidence for expanding Maxwell's equations to include media motion that could be time and even space dependent. Therefore, we have developed the expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system (MEs-f-MDMS) by neglecting relativistic effect. This article first presents the updated progresses made in the field. Secondly, we extensively investigated Faraday's law of electromagnetic induction for a media system that moves with an acceleration. We found that, the "anti-flux rule" examples outlined by Feynman in his book are just caused by the accelerated motion of the media, which were not included in Maxwell's equations, but disregarded. This is a typical example that Maxwell's equations have to be expanded for moving media. Therefore, the charged moving media are confirmed to be the sources of generating electromagnetic radiation (a motion-generated electromagnetic field); and the generated electromagnetic wave within the medium can be described using the expanded Maxwell's equations. Most importantly, in comparison to the existing classical electrodynamics, the newly developed MEs-f-MDMS marks four unique advances, which have been summarized and the near field electrodynamics vs. the far field electrodynamics are proposed.

Maxwell's equations for a mechano-driven media system, Faraday's law of electromagnetic induction, non-inertia frame of references, Feynman's "anti-flux rule" example

doi: [10.1360/SST-2022-0322](https://doi.org/10.1360/SST-2022-0322)